Μάθημα 11ο 24/04/2020

$f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$: ανοικτό , $z_0 \in D$

f ($\mathbb{C}$-)διαφορίσιμη στο z_0 $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$

τό γράφουμε
μιγαδικά αντί για $\mathbb{C}$.

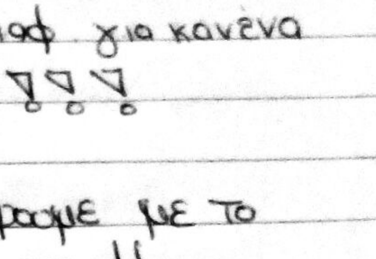
Ισχύουν για $\mathbb{C}$-διαφ. συναρτήσεις f οι «συνήθεις» ιδιότητες διαφορίσιμων συναρτήσεων (βλέπε π.χ. ΑΛ Ι , ΑΛ ΙΙΙ) → Πρόταση 3.1.1.

Βασικά παραδείγματα στο παράδειγμα 3.1.1 είναι
το • $f(z) = \bar{z}$ __δεν__ __είναι__ $\mathbb{C}$-διαφ για κανένα $z \in \mathbb{C}$ γιατί $\nexists \lim\limits_{w \to 0} \frac{\bar{w}}{w}$!!!

Από την άλλη όμως αν το γράφουμε με το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο είναι διαφ/μο.

(SOS) Βασικό Θεώρημα: $\boxed{\text{Θεώρημα Cauchy-Riemann}}$

$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x+iy \in D \subset \mathbb{C}$
$\Leftrightarrow (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$
δηλ.



Η f είναι $\mathbb{C}$-διαφορίσιμη στο $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ $\Leftrightarrow$
$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)$ είναι διαφορίσιμο διανυσματικό

πεδίο στο $\mathbb{R}^2$ στο $(x_0, y_0) \in D$ με
παράγωγο $D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

__και__ (2) $\begin{cases} \boxed{u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)} \\ \boxed{v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0)} \end{cases}$ Εξισώσεις Cauchy-Riemann

Και αν ισχύει αυτό τότε:

$$f'(z_0) = \underbrace{u_x(x_0,y_0)}_{=\lambda_1} + i\,\underbrace{v_x(x_0,y_0)}_{=\lambda_2}$$

Προσοχή: Απόδειξη του Θεωρήματος C-R.

Υπόδειξη

$$f\text{-διαφ στο } z_0 \iff \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$

Αυτό το όριο το γράφω σαν να είναι διανυσματικό πεδίο, όπου λ σε αυτό το όριο είναι το $f'(z_0)$ ή $\lambda = f'(z_0)$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - \lambda(z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{z \to z_0} \frac{\binom{u}{v}(x,y) - \binom{u}{v}(x_0,y_0) - \Lambda\binom{x - x_0}{y - y_0}}{\|(x - x_0, y - y_0)\|} = 0$$

όπου $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$

Άρα: $\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0) \end{cases}$, αποδείχθηκαν οι Εξισώσεις Cauchy-Riemann

με $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$

$\mathbb{R}$- και $\mathbb{C}$- γραμμικότητα μιγαδικών συναρτήσεων και σχέση τους με $\mathbb{C}$-διαφ. και διαφ/τα του αντίστοιχου διαν/κού πεδίου στον $\mathbb{R}^2$ ($\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}$- διαφορισιμότητα της μιγαδικής συνάρτησης)

(α) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: θα την λέμε $\mathbb{R}$- γραμμική $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{C} : f(z) = \lambda z + \mu \bar{z}, \ \forall z \in \mathbb{C}$

(β) $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: θα την λέμε $\mathbb{C}$- γραμμική $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{C} : f(z) = \lambda z, \ \forall z \in \mathbb{C}$ $[\mu = 0]$

(α) αντιστοιχεί σε γραμμικά διανυσματικά πεδία στο $\mathbb{R}^2$ δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(β) αντιστοιχεί σε γραμμικά διανυσματικά πεδία στο $\mathbb{R}^2$ δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\underset{a=\delta}{\overset{\beta=-\gamma}{\Longleftrightarrow}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} a & -\gamma \\ \gamma & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ένα οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$ με $\mathbb{R}^2$: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y)$, $(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, είναι διαφ/μο στο (x_0, y_0) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \exists\, D\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = A$$

$\Leftrightarrow$ *

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\binom{u}{v}(x,y)-\binom{u}{v}(x_0,y_0) - A\binom{x-x_0}{y-y_0}}{\|(x-x_0),(y-y_0)\|} = \binom{0}{0}$$

Έστω ότι το $\binom{u}{v}$ αντιστοιχεί στην $f: D \to \mathbb{C}$ τότε το προηγούμενο όριο αντιστοιχεί στο

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)-\lambda(z-z_0)-\mu(\bar{z}-\bar{z}_0)}{z-z_0} = 0$$

Ώστε αν ισχύει αυτό τότε λέμε ότι η f είναι $\mathbb{R}$-διαφορίσιμη στο z_0 με $\mathbb{R}$-παράγωγο στο z_0, την $\mathbb{R}$-γραμμική μιγαδική συνάρτηση (διαφορικό) $df_{z_0}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με:

$\mathbb{R}$ παράγωγο $\leftarrow$ $\boxed{df_{z_0}(z)} = \lambda z + \mu \cdot \bar{z}$, $z \in \mathbb{C}$.

Ενώ στην περίπτωση της $\mathbb{C}$-διαφ/τας της f στο z_0 έχουμε το μιγαδικό διαφορικό $\boxed{(f'(z_0))(z)} = \lambda z$, $z \in \mathbb{C}$

$\downarrow$

$\mathbb{C}$-παράγωγο

[αυτά μέχρι το 3.17]

[αύριο: διαφορετικές μορφές γραφής (αναπαράστασης) της $\mathbb{C}$-παραγώγου $f'(z_0) = \lambda$]

Τώρα θα δούμε άλλα σημαντικά παραδείγματα μιγαδικά διαφορίσιμων / ολόμορφων / ακέραιων συναρτήσεων]

<u>Π.χ. 3.1.4</u>

$$e^{x+iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y = u(x,y) + i v(x,y)$$

Βλέπουμε ότι $u, v: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ άπειρες φορές διαφορίσιμες άρα το διανυσμ. πεδίο είναι διαφ/μο οπότε με εξισώσεις Cauchy-Riemann:

$$\text{και} \begin{cases} u_x(x,y) = e^x \cos y = v_y(x,y) \\ v_x(x,y) = e^x \sin y = -u_y(x,y) \end{cases} \Rightarrow \text{η εκθετική είναι}$$

μιγαδικά διαφορίσιμη $\Rightarrow$ ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C}$
$\Rightarrow$ ακέραια

Π.Χ 3.1.5

$f(z) = \log z$, για την οποία αποδείξαμε

ότι είναι συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Άρα έπεται λόγω της συνέχειας ότι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ με

$$(\log z)' = \frac{1}{z} , \ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

Απόδειξη:

Πρόταση 3.1.2

Συνοπτικά: λέει ότι g συνεχής, $f = \exp g$ ολόμορφη τότε και η g ολόμορφη με με $g' = \frac{f'}{f}$.

Η exp όμως είναι ολόμορφη

Πόρισμα Θέτω $g(z) = \log$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(z) = e^{g(z)} = e^{\log z} = z , \ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

$$\Rightarrow g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} , \ z \in \mathbb{C} (-\infty, 0]$$

Άρα:

$\log : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και $(\log z)' = \frac{1}{z}$

- Να κοιτάξουμε τα $\begin{cases} \text{π.χ. } 3.1.6 \text{ και} \\ \text{π.χ. } 3.1.7 \end{cases}$

Άσκηση Α 58 (αυτή είναι απορία - εκτός μαθήματος)

$$f(z)=\begin{cases} e^{-1/z^n} & , z\in \mathbb{C}\setminus\{0\} \quad , z\in\mathbb{C} \\ 0 & , z=0 \end{cases}$$

- Η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$
Από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$f'(z)=e^{-1/z^n}\left(-\frac{1}{z^n}\right)' = e^{-1/z^n}\cdot \underbrace{n\, z^{-n-1}}_{=\frac{1}{z^{n+1}}}$$

Άρα $f'(z)=n\cdot\frac{1}{z^{n+1}}\cdot e^{-1/z^n}$

- Εξετάζω τώρα την μιγαδική παράγωγο στο $z=0$.

$$f'(0)=\lim_{z\to 0}\frac{e^{-1/z^n}-0}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{e^{-1/z^n}}{z}\ ,\ \exists\ ??????$$

$$\left[\ z=x>0:\ \frac{e^{-\frac{1}{x^n}}}{x} \underset{y=\frac{1}{x}}{=} y\,e^{-y^n} \xrightarrow[y\to+\infty]{} ?\quad \text{De L'Hospital}\right.$$

$$=\frac{y}{e^{y^n}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{e^{y^n}\cdot n y^{n-1}} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0.$$

$e^{2k\pi i}=1\ \forall k\in\mathbb{Z}$. Έστω $-\frac{1}{z^n}=2k\pi i \iff z^n=-\frac{1}{2k\pi i}=$

$$\Rightarrow z^n=\frac{i}{2k\pi}\xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Rightarrow z\to 0.$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2k\pi i}}{\sqrt[n]{i/2k\pi}}=\frac{1}{\sqrt[n]{i/2k\pi}} \not\to 0 \Rightarrow \nexists\ f'(0)$$